

2019年广西普通高中学业水平考试

大纲与说明

数 学

一、考试性质、目的和对象

广西普通高中数学学业水平考试是根据《教育部关于普通高中学业水平考试的实施意见》(教基二〔2014〕10号)和自治区教育厅颁发的《普通高中数学学科教学指导意见(试行)》的相关精神和要求设置的,是由自治区教育厅组织实施的省级国家教育考试.考试以《普通高中课程方案(实验)》和《普通高中数学课程标准(实验)》为依据,是面向广西全体普通高中学生的标准参照性考试.

凡具有广西普通高中(含综合高中)学籍且修完规定课程的学生均须参加本科目的测试.按照广西普通高中学籍管理条例规定,在本考试中取得合格及以上等级是广西普通高中学生毕业的必备条件之一,也是普通高中同等学力认定的主要依据之一,本考试结果也是高等学校招生录取的重要参考之一.

本考试结果以A、B、C、D四个等级形式呈现,其中D为不合格.

二、考试目标

广西普通高中数学学业水平考试旨在考查考生经过学习国家规定的普通高中数学课程后,在数学学科方面应达到的基本素养.具体表现在数学基础知识和基本技能以及直观想象、数学抽象、数学运算、逻辑推理、数据分析、数学建模等数学素养.

1. 基础知识和基本技能

1.1 理解或掌握《普通高中数学课程标准(实验)》规定的必修课程、选修课程系列1与选修课程系列2中的相同部分内容的数学概念、性质、法则、公式、公理、定理以及由其内容反映的数学思想方法.

1.2 能按照一定程序与步骤进行简单的数学运算、数据处理和图表绘制.

2.直观想象

2.1 能够在熟悉的情境中，借助图形性质和变换确定（发现）数学规律.

2.2 能够在熟悉的情境中，描述简单图形的位置关系和度量关系及其特有性质;能用图形描述和表达熟悉的数学问题.

3.数学抽象

3.1 能够解释数学概念和规则的含义，了解数学命题的条件与结论，能够在熟悉的情境中抽象出数学问题.

3.2 能够在熟悉的情境中直接抽象出数学概念和规则，能够了解用数学语言表达的推理和论证，能够结合实际情境解释相关的抽象概念.

4.数学运算

4.1 能够在熟悉的数学情境中，了解运算对象，提出运算问题，根据问题的特征建立合适的运算思路解决问题.

4.2 能够了解运算法则及其适用范围，正确进行运算，能够运用运算验证简单的数学结论，能够用运算的结果说明问题.

5.逻辑推理

5.1 能够在熟悉的情境中，用归纳或类比的方法发现数量或图形性质、数量关系或图形关系.

5.2 了解熟悉的数学命题的条件与结论之间的逻辑关系，能够证明简单的数学命题并有条理地表述论证过程.

6.数据分析

6.1 能够在熟悉的情境中了解随机现象，能够对熟悉的概率问题选择合适的概率模型解决问题.

6.2 能够对熟悉的统计问题，选择合适的抽样方法收集数据，掌握描述、刻画、分析数据的基本统计方法解决问题.

7.数学建模

7.1 了解熟悉的数学模型的实际背景及其数学描述，了解数学模型中参数、结论的实际含义.

7.2 知道数学建模的过程，能够在熟悉的实际情境中，模仿学过的数学建模过程解决问题.

三、考试内容和要求

(一) 考试范围

本考试范围为《普通高中数学课程标准（实验）》的必修课程、选修系列 1 和选修系列 2 的相同内容部分.

(二) 考试内容、要求与说明

内容领域	内容主题	考查要求
函数	集合与常用逻辑	了解集合的含义、元素与集合的“属于”关系
		能用自然语言、图形语言、集合语言（列举法或描述法）描述不同的具体问题
		理解集合之间包含与相等的含义，能识别给定集合的子集
		在具体的情境中了解全集与空集的含义
		理解两个集合的并集、交集、补集的含义,能求两个简单集合的并集与交集，能求给定子集的补集，能使用 Venn 图表达集合的关系
		了解命题的概念
		了解“若 p 则 q”形式的原命题的逆命题、否命题与逆否命题，会分析四种命题的相互关系
		理解充分条件、必要条件和充要条件的意义
		知道逻辑联结词“或”、“且”和“非”的含义
	了解全称量词与存在量词的意义，能对简单的含有一个量词的命题进行否定	
函数的概念	了解构成函数的要素，会求一些简单函数的定义域和值域	

	<p>会选择恰当的方法（如图象法、列表法、解析法）表示函数</p> <p>了解简单的分段函数，会进行简单应用</p> <p>结合函数图像，会用符号语言表达简单函数的单调性、最大值、最小值，理解它们的作用和实际意义</p> <p>结合具体函数了解函数奇偶性的含义</p> <p>结合二次函数图象判断一元二次方程根的存在性及根的个数，了解函数的零点与方程根的联系</p> <p>结合具体函数的图像了解二分法是一种求方程近似解的常用方法</p>
基本初等函数 I	<p>理解根式与分数指数幂的概念及其互化，能进行有理数指数幂的运算，化简、计算一些简单的式子</p> <p>理解指数函数的概念及其单调性、指数函数图象通过的特殊点</p> <p>理解对数的概念及其运算性质，知道用换底公式能将一般对数转化成自然对数或常用对数，会用对数的运算性质及运算法则计算一些简单的式子</p> <p>了解对数函数的概念及其单调性、对数函数图象通过的特殊点；知道指数函数与对数函数互为反函数</p> <p>了解幂函数的概念，结合函数 $y = x, y = x^2, y = x^3, y = \frac{1}{x}, y = x^{\frac{1}{2}}$ 的图象了解它们的变化情况</p> <p>了解指数函数、对数函数以及幂函数的增长特征，知道直线上升、指数爆炸、对数增长等不同函数类型增长的含义</p>
基本初等函数 II (三角函数)	<p>了解任意角、弧度制的概念，能进行弧度与角度的互化</p> <p>了解任意角三角函数（正弦、余弦、正切）的定义.了解三角函数的周期性.</p> <p>会用同角三角函数的基本关系式</p> <p>会用正弦、余弦、正切函数的诱导公式解决简单的相关问题</p> <p>会画出正弦、余弦、正切函数的图象</p> <p>理解正弦、余弦函数在区间 $[0, 2\pi]$ 上的性质（如单调性、最大和最小值、图象与 x 轴交点等）、理解正切函数在一个区间 $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ 上的性质</p> <p>了解函数 $y = A\sin(\omega x + \varphi)$ 的图象，知道参数 A, ω, φ 对函数图象变化的影响</p>
三角恒等变换	<p>会用两角和与差的正弦、余弦进行简单的三角恒等变换</p> <p>会用二倍角的正弦、余弦进行简单的三角恒等变换</p>
导数及其应用	<p>会用三角函数解决一些简单实际问题</p> <p>理解导数的几何意义</p> <p>会用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数</p> <p>会用导数研究简单函数的单调性，会求简单函数的单调区间</p> <p>会用导数求出函数的极大值、极小值(其中多项式函数不超过 3 次)</p>

		会用导数求在给定区间上函数的最大值、最小值
	数列	理解数列的概念，运用数列的表示方法
		理解等差数列的定义及证明的基本方法，会用等差数列的通项公式、前 n 项和公式解决简单的问题
		理解等比数列的定义及证明基本方法，会用等比数列的通项公式、前 n 项和公式解决简单的数列问题
	不等式	会解简单的一元二次不等式
		会用平面区域表示二元一次不等式（组）
		会抽象出一些简单的二元线性规划问题，并加以解决
		会用基本不等式解决简单的最大（小）值问题
几何与代数	数系的扩充与复数的引入	理解复数的基本概念
		会进行复数代数形式的四则运算
	算法初步	了解程序框图的概念，了解程序框图的三种基本逻辑结构：顺序、条件分支、循环
		了解几种基本算法语句——输入语句、输出语句、赋值语句、条件语句、循环语句的含义
	立体几何初步	了解柱、锥、台、球及简单组合体的结构特征
		能画出长方体、球、圆柱、圆锥、棱柱等的简易组合的三视图，能识别上述的三视图所表示的立体模型；初步学会用斜二测法画出它们的直观图
		了解球、棱柱、棱锥、台的表面积和体积的计算公式
		理解空间直线、平面位置关系的定义，会用平面的基本性质说明点、线、面的空间位置关系
		能用公理 4 及等角定理判断空间直线间的位置关系
		知道空间直线与平面的位置关系及其表示方法
		知道空间平面与平面的位置关系及其表示方法
		会用直线与平面平行的判定方法和性质研究简单的直线与平面平行关系
		会用平面与平面平行的判定方法和性质研究简单的平面与平面平行关系
		会用直线与平面垂直的判定方法和性质研究简单的直线与平面间的垂直关系
		会用两个平面垂直的判定方法和性质研究简单的平面间的垂直关系
	能用已获得的结论证明空间基本图形位置关系的简单命题	
	了解空间直角坐标系的意义，会求空间点的坐标和空间两点间的距离	
	解析几何初步	理解直线的倾斜角与斜率的概念，会求经过两点的直线的斜率
		能根据斜率判定两条直线平行或垂直
		能用直线方程的点斜式、两点式和一般式表示直线，了解斜截式与一次函数的关系
		会用解方程组的方法求两条相交直线的交点坐标
会用公式求两点间、点到直线距离，会求两条平行直线间的距离		
掌握确定圆的几何要素，掌握圆的标准方程与一般方程		

		会将圆的标准方程和圆的一般方程互化，由圆的一般方程会求圆的圆心坐标及半径
		会根据给定的直线、圆的方程，利用代数方法和几何方法判断直线与圆、圆与圆的位置关系
		会用直线和圆的方程解决一些简单的问题
	圆锥曲线与方程	掌握椭圆的定义、几何图形、标准方程及简单几何性质
		了解双曲线、抛物线的定义、几何图形、标准方程及简单几何性质
	平面向量	理解向量的几何表示
		理解向量相等和向量共线的含义，初步应用向量共线的条件解决一些简单问题
		掌握向量加法和减法运算，向量数乘运算，理解其几何意义
		理解平面向量的正交分解及其坐标表示
		会用坐标表示平面向量的加、减与数乘运算
		会用坐标表示平面向量共线、垂直的条件
		理解平面向量数量积的含义和向量运算律，初步应用数量积定义及其运算律进行简单计算
		了解平面向量数量积的坐标表示，初步学会进行平面向量数量积的坐标运算
		能运用数量积表示向量的模、夹角，会用数量积判断两个平面向量的垂直关系
	推理与证明	了解独立性检验的基本思想和方法，了解 2×2 列联表及其初步应用
		了解合情推理的含义，初步学会利用归纳和类比等进行简单的推理
		理解演绎推理的基本模式，并能运用它们进行一些简单推理
		了解分析法、综合法、反证法的思考过程、特点
	解三角形	掌握正弦定理、余弦定理，并能解决一些简单的三角形度量问题
		理解正弦定理、余弦定理，能解决简单的三角形度量问题、与测量和几何计算有关的实际问题
概率与统计	统计	会用简单随机抽样方法从总体中抽取样本，了解系统抽样和系统抽样方法
		会列频率分布表，会画频率分布直方图、频率折线图、茎叶图，了解它们各自的特点
		会从样本数据中提取基本数字特征（如平均数、标准差），并给出合理的解释
		会用样本的频率分布表估计总体分布，会用样本的基本数字特征估计总体的基本数字特征
		知道作两个有关联变量的数据散点图的方法，了解利用散点图认识变量之间的相关关系
		知道最小二乘法的思想.知道根据给出的线性回归方程系数公式建立线性回归方程
	概率	了解随机事件发生的不确定性和频率的稳定性，了解概率的意义以及频率与概率的区别
		了解两个互斥事件的概率加法公式
		理解古典概型及其概率计算公式，会用列举法计算一些随机事件所含的基本事件数及事件发生的概率
		了解几何概型的意义，会求简单几何概型问题的概率

四、考试形式及试卷结构

(一) 考试形式

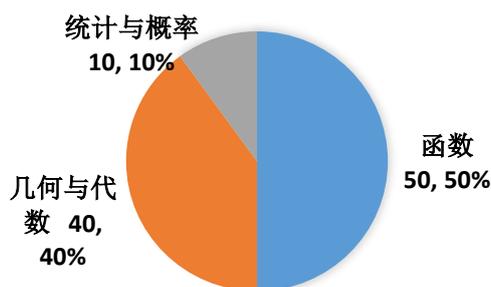
考试采用闭卷、笔试形式；全卷满分 100 分，考试时间为 120 分钟。

(二) 试卷结构

1. 题型与分值

题型	题 量	分值
选择题	约 30 小题	约 60 分
填空题	约 4 小题	约 12 分
解答题	约 4 小题	约 28 分

2. 内容分值与比例



其中对数学基础知识与基本技能的考查约占 60%，对直观想象素养、数学抽象素养、数学运算素养、逻辑推理素养、数据分析素养和数学建模素养的考查约占 40%。

3. 难度分值与比例

难度及比例：易、中、难试题比例为 7 : 2 : 1，具体如下

难度类别	难度系数	分 值	比 例
容易题	0.85 以上	约 70 分	约 70%
中档题	0.60~0.85	约 20 分	约 20%
难 题	0.6 以下	约 10 分	约 10%

五、题型示例

一、选择题

【例 1】已知集合 $M = \{x|x > -1\}$ ，下列关系式中正确的是

- A. $\{0\} \subseteq M$ B. $0 \subseteq M$ C. $\{0\} \in M$ D. $\varnothing \subseteq M$

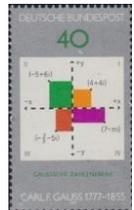
【正确答案】A

【考查目标】基础知识和基本技能/理解或掌握《普通高中数学课程标准（实验）》规定的必修课程、选修课程系列 1 与选修课程系列 2 的相同部分内容的数学概念、性质、法则、公式、公理、定理以及由其内容反映的数学思想方法.

【知识内容】函数/集合与常用逻辑/了解集合的含义、元素与集合的“属于”关系.

【试题分析】因为 $0 > -1$ ， $\{0\}$ 表示集合，A 正确.

【例 2】1977 年是高斯诞辰 200 周年，为纪念这位伟大的数学家对复数发展所做出的杰出贡献，德国特别发行了一枚邮票（如图）. 这枚邮票上印有 4 个复数，其中的两个复数的和： $(4+4i)+(-5+6i)=$



- A. $-1+10i$ B. $-2+9i$ C. $9-2i$ D. $10-i$

【正确答案】A

【考查目标】数学运算素养/能够了解运算法则及其适用范围，正确进行运算，能够运用运算验证简单的数学结论，能够用运算的结果说明问题. 例 2 图

【知识内容】几何与代数/数系的扩充与复数的引入/会进行复数形式的四则运算

【试题分析】根据复数代数形式的四则运算法则：实部与实部相加，虚部与虚部相加即得，A 正确.

【例 3】经过点 $P(0, 2)$ 且斜率为 2 的直线方程为

- A. $2x+y+2=0$ B. $2x-y-2=0$ C. $2x-y+2=0$ D. $2x+y-2=0$

【正确答案】C

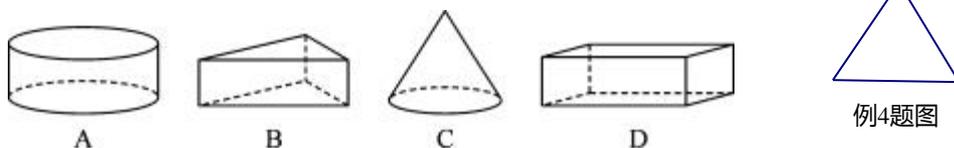
【考查目标】基础知识和基本技能/理解或掌握《普通高中数学课程标准（实验）》规定的必修课程、选修课程系列 1 与选修课程系列 2 的相同部分内容的数学概念、性质、法则、公式、公理、定理以及由其内容反映的数学思想方法.

【知识内容】几何与代数/解析几何初步/能用直线的点斜式、两点式和一般式表示直线

【试题分析】由已知直线过点 $P(0, 2)$ 且斜率 $k=2$ ，代入点斜式方程 $y-y_1=k(x-x_1)$ 得：

$y-2=2(x-0)$ ，化简并整理得 $2x-y+2=0$ ，C 正确.

【例 4】在下列水平放置的几何体中，正视图是右图的是



【正确答案】 C

【考查目标】 直观想象素养/能够在熟悉的情境中建立实物与图形之间的联系,能够描述简单空间图形的位置关系和度量关系及其特有的性质.

【知识内容】 几何与代数/立体几何初步/能画出长方体、球、圆柱、圆锥、棱柱等的简易组合的三视图,能识别上述的三视图所表示的立体模型.

【试题分析】 由于正视图是左图中的三角形,说明其几何体是锥体, C 正确.

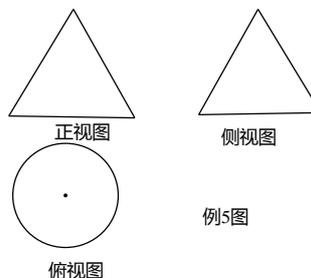
【例 5】 如图所示,一个空间几何体的正视图和侧视图都是边长为 2 的等边三角形,俯视图是一个圆,那么这个几何体的体积为

A. $\frac{\sqrt{3}}{4}\pi$

B. $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$

C. $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$

D. $\sqrt{3}\pi$



【正确答案】 B

【考查目标】 基础知识和基本技能/理解或掌握《普通高中数学课程标准(实验)》规定的必修课程、选修课程系列 1 与选修课程系列 2 的相同部分内容的数学概念、性质、法则、公式、公理、定理以及由其内容反映的数学思想方法.

【知识内容】 几何与代数/立体几何初步/能画出长方体、球、圆柱、圆锥、棱柱等的简易组合的三视图,能识别上述的三视图所表示的立体模型;了解球、棱柱、棱锥、台的表面积和体积的计算公式.

【试题分析】 由正视图和侧视图都是三角形,说明其几何体是锥体,再由俯视图是圆,说明底面是圆,所以该几何体为圆锥.圆锥的底面半径为 1,母线长为 2,所以高为 $\sqrt{3}$.所以所求

圆锥体积为 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi$, B 正确.

【例 6】 下列命题中正确的是

A. 若直线 $m \parallel$ 平面 α , 直线 $n \subset \alpha$, 则 $m \parallel n$.

B. 若直线 $m \perp$ 平面 α , 直线 $n \subset \alpha$, 则 $m \perp n$.

C. 若平面 $\alpha \parallel$ 平面 β , 直线 $n \subset \alpha$, 直线 $n \subset \beta$, 则 $m \parallel n$.

D. 若平面 $\alpha \perp$ 平面 β , 直线 $m \perp \beta$.

【正确答案】 B

【考查目标】 直观想象素养/能够在熟悉的情境中建立实物与图形之间的联系,能够描述简单空间图形的位置关系和度量关系及其特有的性质.

【知识内容】 几何与代数/立体几何初步/知道空间直线与平面的位置关系及表示方法.

【试题分析】 利用正方体为载体,通过正方体的棱和面的位置关系,可举出 A, C, D 三个选项的反例,说明不成立.所以 B 正确.

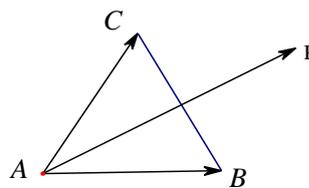
【例 7】 如图, P 是 $\triangle ABC$ 所在平面内一点,且满足 $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AP}$, 则

A. $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{CP}$

B. $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AP}$

C. $\overrightarrow{AP} - \overrightarrow{CP} = \overrightarrow{BP}$

D. $\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP}$



【正确答案】 C

【考查目标】 基础知识和基本技能/理解或掌握《普通高中数学课程标准（实验）》规定的必修课程、选修课程系列 1 与选修课程系列 2 的相同部分内容的数学概念、性质、法则、公式、公理、定理以及由其内容反映的数学思想方法.

【知识内容】 几何与代数/平面向量/掌握向量加法和减法的运算，向量数乘运算，理解其几何意义.

【试题分析】 由向量相等的概念知 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CP}$ ，根据向量的加法运算得到选项 C 正确.

【例 8】 一个箱子中装有大小相同的红球、白球、黑球各一个，从中任取一个球，记事件“取出红球”为 M ，事件“取出白球”为 N ，则下列说法正确的是

A. M 为不可能事件

B. N 为必然事件

C. M 和 N 为对立事件

D. M 和 N 为互斥事件

【正确答案】 D

【考查目标】 数学抽象素养/能够解释数学概念和规则含义，了解数学命题的条件结论，能够在熟悉的情境中抽象出数学问题.

【知识内容】 几何与代数/概率与统计/了解两个互斥事件的概率加法公式.

【试题分析】 由题意，事件 M 与事件 N 不可能同时发生，也可能都不发生，所以 M 与 N 是互斥但不对立事件， D 正确.

【例 9】 “ $x > 2$ ”是“ $x = 5$ ”的

A. 充分而不必要条件

B. 必要而不充分条件

C. 充要条件

D. 既不充分也不必要条件

【正确答案】 B

【考查目标】 逻辑推理素养/了解熟悉的数学命题的条件与结论之间的逻辑关系，能够证明简单的数学命题并有条理地表述论证过程.

【知识内容】 函数/集合与常用逻辑/理解充分条件、必要条件和充要条件的意义.

【试题分析】 由题意，“ $x > 2$ ”是“ $x = 5$ ”的条件，易知“ $x > 2$ ”不一定只有“ $x = 5$ ”，但“ $x = 5$ ”一定能推出“ $x > 2$ ”， B 正确.

【例 10】 命题“若两个三角形全等，则这两个三角形的面积相等”的逆命题是

A. 若两个三角形的面积相等，则这两个三角形全等

B. 若两个三角形不全等，则这两个三角形的面积相等

C. 若两个三角形的面积相等，则这两个三角形不全等

D. 若两个三角形不全等，则这两个三角形的面积不相等

【正确答案】 A

【考查目标】 逻辑推理素养/了解熟悉的数学命题的条件与结论之间的逻辑关系，能够证明简单的数学命题并有条理地表述论证过程.

【知识内容】 函数/集合与常用逻辑/了解“若 p 则 q ”形式的原命题的逆命题、否命题及逆否命题，初步学会分析四种命题的相互关系.

【试题分析】由题意，只需将原命题的条件与结论互换即可得到逆命题，A 正确.

【例 11】已知某种细胞分裂时，由 1 个分裂成 2 个，2 个分裂成 4 个，…，依此类推，那么 1 个这样的细胞分裂 3 次后，得到的细胞个数为

- A. 4 个 B. 8 个 C. 16 个 D. 32 个

【正确答案】B

【考查目标】逻辑推理素养/能够在熟悉的情境中，用归纳或类比的方法发现数量关系或图形性质、数量关系.

【知识内容】函数/基本初等函数 I /理解指数函数的概念及其单调性、指数函数的图象通过的特殊点.

【试题分析】利用题意，分裂出的细胞个数可构成等比数列，公比是 2，从而 1 个这样的细胞分裂 3 次后，得到的细胞个数为 8，B 正确.

【例 12】从某中学高三年级中随机抽取了 6 名男生，其身高和体重的数据如下表所示：

编号	1	2	3	4	5	6
身高/cm	170	168	178	168	176	172
体重/kg	65	64	72	61	67	67

由以上数据，建立了身高 x 预报体重 y 的回归方程 $\hat{y} = 0.80x - 71.6$. 那么，根据

上述回归方程预报一名身高为 175cm 的高三男生的体重是

- A. 80 kg B. 71.6 kg C. 68.4 kg D. 64.8 kg

【正确答案】C

【考查目标】数据分析素养/能够对熟悉的统计问题，选择合适的抽样方法收集数据，掌握描述、刻画、分析数据的基本统计方法解决问题.

【知识内容】函数/统计/知道最小二乘法的思想.知道根据给出的线性回归方程系数公式建立线性回归方程.

【试题分析】根据题设，将身高 $x=175$ 代入回归方程 $\hat{y} = 0.80 \times 175 - 71.6 = 68.4$ ，从而答案为 C 正确.

【例 13】在“世界读书日”前夕，为了了解某地 5000 名居民某天的阅读时间，从中抽取了 200 名居民阅读时间进行统计分析，在这个问题中，5000 名居民的阅读时间的全体是

- A. 个体 B. 样本的容量 C. 总体 D. 从总体中抽取的一个样本

【正确答案】C

【考查目标】数据分析素养/能够对熟悉的统计问题，选择合适的抽样方法收集数据，掌握描述、刻画、分析数据的基本统计方法，解决问题.

【知识内容】函数/统计/会用简单随机抽样方法从总体中抽取样本，了解系统抽样和系统抽样方法.

【试题分析】从 5000 名居民某天的阅读时间中抽取 200 名居民的阅读时间，样本容量是 200，抽取的 200 名居民的阅读时间是一个样本，每名居民的阅读时间就是一个个体，5000 名居民的阅读时间的全体是总体，C 正确.

【例 14】执行如图所示的程序框图，输出的结果是

- A. 3 B. 9 C. 27 D. 64

【正确答案】C

【考查目标】基础知识和基本技能/能够按照一定的规则和步骤进行计算、画图和推理.

【知识内容】几何与代数/算法初步/了解几种基本算法语句——输入语句、

赋值语句、条件语句、循环语句的含义.

【试题分析】根据题意, 第一次循环结果输出的 $M=8 < 9$, 再经过第二次循环

易得 $n=3$, 从而第二次输出的 $M=27 > 9$, 不再循环, 从而答案 C 正确.

【例 15】某居民小区拟将一块三角形空地改造成绿地. 经测量, 这块三角形空地的两边长分别为 32m 和 68m, 它们的夹角是 30° . 已知改造费用为 50 元/ m^2 , 那么, 这块三角形空地的改造费用为

A. $27200\sqrt{3}$ 元

B. $54400\sqrt{3}$ 元

C. 27200 元

D. 54400 元

【正确答案】C

【考查目标】直观想象素养/能够在熟悉的情境中建立实物与图形之间的联系, 能够描述简单空间图形的位置关系和度量关系及其特有的性质.

【知识内容】几何与代数/解三角形/理解正弦定理、余弦定理, 能解决简单的三角形度量问题、与测量和几何计算有关的实际问题.

【试题分析】将实际问题转化为求解三角形的面积. 通过三角形面积公式, 直接计算空地面积为 $544 m^2$, 然后根据单位面积改造费为 50 元/ m^2 , 求得结果为 27200 元, 所以 C 正确.

二、填空题

【例 1】幂函数 $y = x^\alpha$ 图象经过点 (4, 2), 则这个幂函数的解析式是_____.

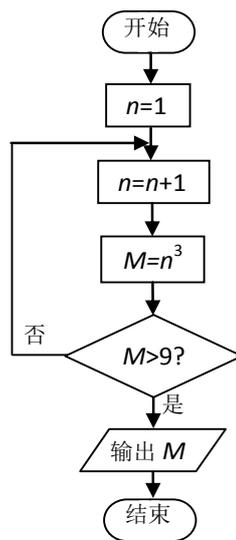
【正确答案】 $y = x^{\frac{1}{2}}$

【考查目标】数学运算素养/能够在熟悉的数学情境中, 了解运算对象, 提出运算问题, 根据问题的特征建立合适的运算思路解决问题; 直观想象/能够通过图形直观认识数学问题, 能够用图形描述和表达熟悉的问题以启迪解决问题的思路.

【知识内容】函数/基本初等函数 I /了解幂函数的概念, 结合函数 $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$, $y = x^{-1}$, $y = x^{0.5}$ 的图象了解它们的变化情况.

【试题分析】将点 (4, 2) 代入幂函数 $y = x^\alpha$, 得到 $4^\alpha = 2 = 4^{\frac{1}{2}}$, 所以 $\alpha = \frac{1}{2}$.

【例 2】在 $\triangle ABC$ 中, 内角 A、B、C 所对的边分别为 a、b、c, 若 $b=1$, $c=\sqrt{3}$, $C=60^\circ$, 则 $A=$ _____.



例 14 题图

【正确答案】 90°

【考查目标】 基本知识和基本技能/理解或掌握《普通高中数学课程标准（实验）》规定的必修课程、选修课程系列 1 与选修课程系列 2 的相同部分内容的数学概念、性质、法则、公式、公理、定理以及由其内容反映的数学思想方法；数学运算/能够在熟悉的数学情境中，了解运算对象，提出运算问题，根据问题的特征建立合适的运算思路解决问题.

【知识内容】 几何与代数/解三角形/掌握正弦定理和余弦定理，并能解决一些简单的三角形度量问题.

【试题分析】 由已知条件列出等式 $\frac{1}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 60^\circ}$ ，求出角 $B = 30^\circ$ ，即得角 $A = 90^\circ$.

【例 3】 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点坐标为_____.

【正确答案】 (1, 0)

【考查目标】 基础知识和基本技能/理解或掌握《普通高中数学课程标准（实验）》规定的必修课程、选修课程系列 1 与选修课程系列 2 的相同部分内容的数学概念、性质、法则、公式、公理、定理以及由其内容反映的数学思想方法.

【知识内容】 几何与代数/圆锥曲线与方程/了解双曲线、抛物线的定义、几何图形、标准方程及简单的几何性质.

【试题分析】 抛物线 $y^2 = 4x$ 的焦点在 x 轴上，因为 $p=2$.从而焦点坐标为 (1, 0).

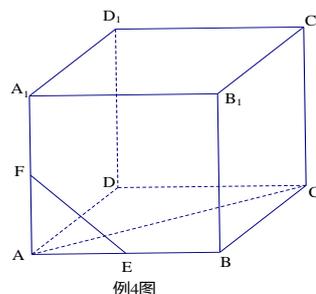
【例 4】 如图所示，在正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 中， E 、 F 分别为棱 AB 和 AA_1 的中点，

则直线 EF 与平面 ACC_1A_1 所成的角等于_____.

【正确答案】 30°

【考查目标】 逻辑推理素养/了解熟悉的数学命题的条件与结论之间的逻辑关系，能够证明简单的数学命题并有条理地表述论证过程；直观想象/能够通过图形直观认识数学问题，能够用图形描述和表达熟悉的问题以启迪解决这些问题的思路.

【知识内容】 几何与代数/立体几何初步/知道空间直线与平面的位置关系及其表示方法，直线与平面所成角.



【试题分析】 因为 $EF \parallel A_1B$ ，所以直线 A_1B 与平面 ACC_1A_1 所成

的角等于直线 EF 与平面 ACC_1A_1 所成的角.连接 BD ，交 AC 于点 O ，则 $BO \perp$ 平面

ACC_1A_1 ，则 $\angle BA_1O$ 为所求角.因为 $BO = \frac{1}{2} A_1B$ ，所以 $\angle BA_1O = 30^\circ$.

【例 5】 甲、乙两名射击选手射击 10 次，经计算得各自成绩的标准差分别为 $S_{甲} = 1.29$ 和

$S_{乙} = 1.92$ ，则_____的成绩较稳定. (填“甲”或“乙”)

【正确答案】甲

【考查目标】基础知识和基本技能/理解或掌握《普通高中数学课程标准（实验）》规定的必修课程、选修课程系列 1 与选修课程系列 2 的相同部分内容的数学概念、性质、法则、公式、公理、定理以及由其内容反映的数学思想方法.

【知识内容】几何与代数/统计/会用样本数据中提取基本数字特征（如平均数、标准差），并给出合理的解释.

【试题分析】根据标准差的意义，数值越小的样本越稳定.

【例 6】函数 $f(x) = x^3 - 3x + 2 (x \in \mathbf{R})$ 的极小值是_____.

【正确答案】0

【考查目标】数学运算素养/能够在熟悉的数学情境中，了解运算对象，提出运算问题，根据问题的特征建立合适的运算思路解决问题

【知识内容】函数/导数及其应用/会用导数能求出基本初等函数的极大值、极小值.

【试题分析】先求出导函数 $f'(x) = 3(x^2 - 1) (x \in \mathbf{R})$ ，得到两个极值点，一个是极大值点 $x = -1$ ，一个是极小值点 $x = 1$ ，再代入原式得出极小值是 0.

【例 7】若将一粒小黄豆随机撒到如图所示的一个八等分圆盘里，则该黄豆落到阴影部分的概率是_____.

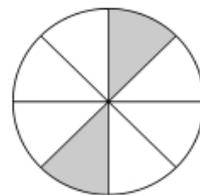
【正确答案】 $\frac{1}{4}$

【考查目标】基础知识和基本技能/能按照一定程序与步骤进行简单的数学运算、数据处理和图表绘制；数据分析素养/能够在熟悉的情境中了解随机现象，能够对熟悉的概率问题选择合适的概率模型解决问题.

【知识内容】概率与统计/概率/了解几何概型的意义，会求几何概型的概率.

【试题分析】此题只要能看出图中有多少等份，阴影部分占了几份就能答对.因此由题知：

图中阴影部分占整个圆的 $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ ，所以所求概率为 $\frac{1}{4}$.



例7题图

【例 8】若焦点在 x 轴上的椭圆 $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{m} = 1$ 的离心率为 $\frac{1}{2}$ ，则 m 的值为_____.

【正确答案】 $\frac{3}{2}$

【考查目标】基础知识和基本技能/理解或掌握《普通高中数学课程标准（实验）》规定的必修课程、选修课程系列 1 与选修课程系列 2 的相同部分内容的数学概念、性质、法则、公式、公理、定理以及由其内容反映的数学思想方法；数学运算/能够在熟悉的情境中，了解运算对象，提出运算问题，根据问题的特征建立合适的运算思路解决问题.

【知识内容】几何与代数/圆锥曲线与方程/掌握椭圆的定义、几何图形、标准方程及简单的几何性质.

【试题分析】因为椭圆的焦点在 x 轴上，所以 $e^2 = \frac{c^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 1 - \frac{m}{2} = \frac{1}{4}$ ，解得 $m = \frac{3}{2}$.

三、解答题

【例 1】某种零件按质量标准分为五个等级. 现从一批该零件中随机抽取 20 个，对其等级进行统计分析，得到频率分布表如下：

等级	一	二	三	四	五
频率	0.05	0.35	m	0.35	0.10

(1) 求 m ;

(2) 从等级为三和五的所有零件中, 任意抽取 2 个, 求抽取的 2 个零件等级恰好相同的概率.

【正确答案】

解: (1) 由频率分布表, 得 $0.05+0.35+m+0.35+0.10=1$, 即 $m=0.15$.

(2) 由 (1) 得等级为三的零件有 3 个, 记作 x_1, x_2, x_3 ; 等级为五的零件有 2 个, 记作 y_1, y_2 . 从 x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 中任意抽取 2 个零件, 所有可能的结果为:

$(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_1, y_1), (x_1, y_2), (x_2, x_3), (x_2, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_1), (x_3, y_2), (y_1, y_2)$, 共计 10 种.

记事件 A 为“从零件 x_1, x_2, x_3, y_1, y_2 中任取 2 件, 其等级相等”, 则 A 包含的基本事件为 $(x_1, x_2), (x_1, x_3), (x_2, x_3), (y_1, y_2)$ 共 4 个, 故所求概率为 $P(A)=\frac{4}{10}=0.4$.

【考查目标】 数据分析素养/能够对熟悉的统计问题, 选择合适的抽样方法收集数据, 掌握描述、刻画、分析数据的基本统计方法, 解决问题; 数学运算/能够了解运算法则及其适用范围, 正确进行运算, 能够运用运算验证简单的数学结论, 能够用运算的结果说明问题.

【知识内容】 概率与统计/会用样本的频率分布估计总体分布, 会用样本的基本数字特征估计总体的基本数字特征; 理解古典概型及其概率计算公式, 会用列举法计算一些随机事件所含的基本事件及事件发生的概率.

【试题分析】 利用频率分布表分析, 列出方程先求出 m 的值; 再利用列举法算出基本事件的个数, 运用古典概率公式求出概率.

【例 2】 已知数列 $\{a_n\}$ 为等差数列, 其中 $a_2=1, a_3=3$, 求此数列的前 4 项之和 S_4 .

【正确答案】

解: 设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d , 因为 $d=a_3-a_2=3-1=2, a_1=a_2-d=1-2=-1$,

所以 $S_4=4a_1+\frac{4 \times 3}{2}d=4 \times (-1)+6 \times 2=8$.

【考查目标】 数学运算素养/能够在熟悉的数学情境中, 了解运算对象, 提出运算问题, 根据问题的特征建立合适的运算思路解决问题.

【知识内容】 函数/数列/会用等差数列的通项公式、前 n 项和公式解决简单的问题.

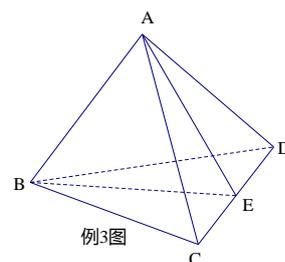
【试题分析】 先利用等差数列通项公式求出公差与首项, 再运用前 n 项和公式求出 S_4 .

【例 3】 如图, 在三棱锥 $A-BCD$ 中, $AC=AD, BC=BD$, 试在 CD 上确定一点 E , 使得 $CD \perp$ 平面 ABE , 并证明你的结论.

【正确答案】

解: 取 CD 的中点 E , 则点 E 为所求.

证明: 连接 AE, BE . 因为 $AC=AD$, 所以 $AE \perp CD$. 因为 $BC=BD$, 所以 $BE \perp CD$. 又因为 $AE \cap BE=E$, 所以 $CD \perp$ 平面 ABE .



【考查目标】 直观想象素养/能够通过图形直观认识数学问题, 能够用图形

描述和表达熟悉的问题以启迪解决这些问题的思路; 逻辑推理素养/能够在熟悉的情境中,

用归纳或类比的方法发现数量或图形性质、数量关系或图形关系.

【知识内容】几何与代数/立体几何初步/初步应用直线与平面垂直的判定方法和性质研究直线与平面间的垂直关系.

【试题分析】此题利用线面垂直的判定定理,通过先证线线垂直即由已知的: $AC=AD$ 、 $BC=BD$ 及中点 E 得出平面 ACD 与平面 BCD 均为等腰三角形,推出 CD 与两条相交直线 AE 和 BE 垂直,从而得出线面垂直.

【例 4】已知圆心为 $C(1, 1)$ 的圆 C 经过点 $M(1, 2)$.

(1) 求圆 C 的方程;

(2) 若直线 $x+y+m=0$ 与圆 C 交于 A 、 B 两点,且 $\triangle ABC$ 是直角三角形,求实数 m 的值.

【正确答案】

解: (1) 圆的半径 $r=|CM|=\sqrt{(1-1)^2+(2-1)^2}=1$, \therefore 圆 C 的方程为 $(x-1)^2+(y-1)^2=1$.

(2) 由题意可知, $|CA|=|CB|=1$, 且 $\angle ACB=90^\circ$.

\therefore 圆心 C 到直线 $x+y+m=0$ 的距离为 $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 即 $\frac{|1+1+m|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$.

解得 $m=-1$ 或 $m=-3$.

【考查目标】数学运算素养/能够通过图形直观认识数学问题,能够用图形描述和表达熟悉的问题以启迪解决这些问题的思路;能够在熟悉的情境中,用归纳或类比的方法发现数量或图形性质、数量关系或图形关系.

【知识内容】几何与代数/解析几何初步/掌握确定圆的几何要素,掌握圆的标准方程;会根据给定的直线、圆的方程,利用代数方法和几何方法判断直线与圆、圆与圆的位置关系.

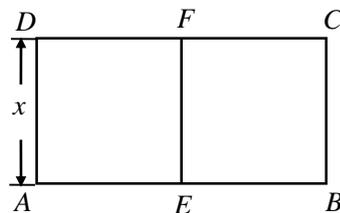
【试题分析】利用已知条件中圆心坐标与圆过点 M 在同一直线上,先求出圆的半径,从而写出圆的标准方程;再利用直线与已知圆相交,再根据点到直线的距离公式,列出方程,从而求出 m 的值.

【例 5】如图,某动物园要建造两间完全相同的矩形熊猫居室,其总面积为 $24m^2$. 设熊猫居室的一面墙 AD 的长为 $xm(2 \leq x \leq 6)$.

(1) 用 x 表示墙 AB 的长.

(2) 假设所建熊猫居室的墙壁造价(在墙壁高度一定的前提下)为每米 1000 元,请将墙壁的总造价 y (元) 表示为 $x(m)$ 的函数.

(3) 当 x 为何值时,墙壁的总造价最低?



【正确答案】

解: (1) $\because AB \cdot AD = 24$, $AD = x$, $\therefore AB = \frac{24}{x} (2 \leq x \leq 6)$.

(2) $y = 3000(x + \frac{16}{x})(2 \leq x \leq 6)$.

(3) $\because 3000(x + \frac{16}{x}) \geq 3000 \times 2 \times \sqrt{x \cdot \frac{16}{x}} = 24000$,

当且仅当 $x = \frac{16}{x}$, 即 $x = 4$ 时取等号, $\therefore x = 4(m)$ 时, 墙壁的总造价最低为 24000 元.

答: 当 x 为 $4m$ 时, 墙壁的总造价最低.

【考查目标】数学运算素养/能够了解运算法则及适用范围,正确进行运算,能够运用运算

验证简单的数学结论，能够用运算的结果说明问题；数学建模素养/知道数学建模的过程，能够在熟悉的实际情境中，模仿学过的数学建模过程解决问题。

【知识内容】函数/函数的概念、不等式/初步学会根据不同的需要选择恰当的方法（如图象法、列表法、解析法）表示函数；会用基本不等式解决简单的最大（小）值问题。

【试题分析】此题首先利用长方形的面积公式由所设的未知数表示另一边长，再根据条件列出总造价与边长的函数关系式，最后利用基本不等式求出其墙壁的最低总造价。

【例 6】已知 $\triangle ABC$ 的三个角 $\angle A$ ， $\angle B$ ， $\angle C$ 所对的边分别为 a, b, c ， $b = c = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ ， $\angle B = 75^\circ$ ，求 a 。

【正确答案】

解：在 $\triangle ABC$ 中， $b = c$ ，所以 $\angle C = \angle B = 75^\circ$ 。则 $\angle A = 180^\circ - (\angle B + \angle C) = 30^\circ$ 。

$$\sin B = \sin 75^\circ = \sin(45^\circ + 30^\circ) = \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}.$$

$$\text{由正弦定理 } \frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B}, \text{ 得 } a = \frac{b \sin A}{\sin B} = \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6}) \times \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{2} + \sqrt{6}}{4}} = 2.$$

【考查目标】数学运算素养/能够在熟悉的情境中，了解运算对象，提出数学问题，根据问题的特征建立合适的运算思路解决问题。

【知识内容】函数、几何与代数/三角恒等变换、解三角形/初步应用两角和与差的正弦、余弦、正切公式进行简单的三角恒等变换；掌握正弦定理、余弦定理，并能解决一些简单的三角度量问题。

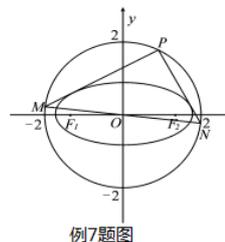
【试题分析】此题根据三角形内角和定理求出相对应的内角，然后根据两角和的余弦公式求另一角的正弦值，最后再利用正弦定理求出其对应的边长。

【例 7】已知椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 的两个焦点为 F_1, F_2 ，离心率为 $\frac{\sqrt{6}}{3}$ ， $\triangle ABF_2$

的周长等于 $4\sqrt{3}$ ，点 A, B 在椭圆上，且 F_1 在边 AB 上。

(1) 求椭圆 C 的标准方程；

(2) 如图，过圆 $O: x^2 + y^2 = 4$ 上任意一点 P 作椭圆 C 的两条切线 PM 和 PN 与圆 O 交于点 M, N ，求 $\triangle PMN$ 面积的最大值。



【正确答案】

解：(1) 由 $\triangle ABF_2$ 的周长为 $4\sqrt{3}$ ，得 $4a = 4\sqrt{3}$ ， $a = \sqrt{3}$ 。

由离心率 $e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{6}}{3}$ ，得 $c = \sqrt{2}$ ， $b^2 = a^2 - c^2 = 1$ 。所以椭圆标准方程为： $\frac{x^2}{3} + y^2 = 1$ 。

(2) 设点 $P(x_p, y_p)$ ，则 $x_p^2 + y_p^2 = 4$ 。

(i) 若两切线中有一条切线的斜率不存在，则 $x_p = \pm\sqrt{3}$ ， $y_p = \pm 1$ ，另一切线的斜率为 0，

从而 $PM \perp PN$ 。此时， $S_{\triangle PMN} = \frac{1}{2}|PM| \cdot |PN| = \frac{1}{2} \times 2 \times 2\sqrt{3} = 2\sqrt{3}$ 。

(ii) 若切线的斜率均存在, 则 $x_p \neq \pm\sqrt{3}$. 设过点 P 的椭圆的切线方程为 $y - y_p = k(x - x_p)$, 代入椭圆方程, 消 y 并整理得, $(3k^2 + 1)x^2 + 6k(y_p - kx_p)x + 3(y_p - kx_p)^2 - 3 = 0$.

依题意 $\Delta = 0$, 得 $(3 - x_p^2)k^2 + 2x_p y_p k + 1 - y_p^2 = 0$.

设切线 PM 、 PN 的斜率分别为 k_1 、 k_2 , 从而 $k_1 \cdot k_2 = \frac{1 - y_p^2}{3 - x_p^2} = \frac{x_p^2 - 3}{3 - x_p^2} = -1$,

即 $PM \perp PN$, 线段 MN 为圆 O 的直径, $|MN| = 4$.

所以, $S_{\Delta PMN} = \frac{1}{2}|PM| \cdot |PN| \leq \frac{1}{4}(|PM|^2 + |PN|^2) = \frac{1}{4}|MN|^2 = 4$, 当且仅当 $|PM| = |PN| = 2\sqrt{2}$ 时,

$S_{\Delta PMN}$ 取最大值 4.

综合 (i)、(ii) 得 ΔPMN 面积的最大值为 4.

【考查目标】 数学运算素养/能够在熟悉的数学情境中, 了解数学运算, 提出运算问题, 根据问题的特征建立合适的运算思路解决问题; 逻辑推理素养/能够在熟悉的情境中, 用归纳或类比的方法发现数量或图形性质、数量关系或图形关系.

【知识内容】 几何与代数/圆锥曲线与方程/掌握椭圆的定义、几何图形、标准方程及简单几何性质.

【试题分析】 此题第 (1) 小题求椭圆的标准方程, 可通过分析所给条件 ΔABF_2 的情况易

得 $a = \sqrt{3}$, 从而可得出所求椭圆的标准方程. 第 (2) 小题是比较难, 需要用到第 (1) 问中所求出的椭圆标准方程, 从求三角形面积的最大值中得三角形的面积是变数, 要分特殊情形和一般情形, 特殊情形是一切线没有斜率的情形, 容易得面积值 $2\sqrt{3}$. 再进一步考虑一般情况, 因点 P 为任意点, 两切线因点而动, 可把切线斜率 k 设为待定系数, 由点斜式列出切线方程, 变成求直线与曲线交点问题, 再由韦达定理得出两切线斜率的关系 (估为固定), 即乘积为定值 -1 , 从而得两切线与特殊情形一样: $PM \perp PN$, 故知线段 MN 为圆 O 的直径 (等于 4), ΔPMN 都是直角三角形, 所以面积为:

$S_{\Delta PMN} = \frac{1}{2}|PM| \cdot |PN| \leq \frac{1}{4}(|PM|^2 + |PN|^2) = \frac{1}{4}|MN|^2 = 4$, 当且仅当 $|PM| = |PN| = 2\sqrt{2}$ 时, $S_{\Delta PMN}$

取最大值 4.

【例 8】 已知函数 $f(x) = x - \ln x + a - 1$, $g(x) = \frac{x^2}{2} + ax - x \ln x$, 其中 $a > 0$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间; (2) 当 $x \geq 1$ 时, $g(x)$ 的最小值大于 $\frac{3}{2} - \ln a$, 求 a 的取值范围.

【正确答案】

解: (1) 函数 $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$.

$f'(x) = 1 - \frac{1}{x} = \frac{x-1}{x}$. 当 $0 < x < 1$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $x > 1$ 时, $f'(x) > 0$.

\therefore 函数 $f(x)$ 的单调递减区间是 $(0, 1)$, 单调递增区间是 $(1, +\infty)$.

(2) 易知 $g'(x) = x - \ln x + a - 1 = f(x)$. 由 (1) 知, $f(x) \geq f(1) = a > 0$, 所以当 $x \geq 1$ 时, $g'(x) \geq g'(1) = a > 0$. 从而 $g(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调递增,

所以 $g(x)$ 的最小值 $g(1) = a + \frac{1}{2}$. 依题意得 $a + \frac{1}{2} > \frac{3}{2} - \ln a$, 即 $a + \ln a - 1 > 0$.

令 $h(a) = \ln a + a - 1$, 易知 $h(a)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增.

所以 $h(a) > h(1) = 0$, 所以 a 的取值范围是 $(1, +\infty)$.

【考查目标】 基础知识和基本技能/理解或掌握《普通高中数学课程标准（实验）》规定的必修课程、选修课程系列 1 与选修课程系列 2 的相同部分内容的数学概念、性质、法则、公式、公理、定理以及由其内容反映的数学思想方法；数学运算素养/能够在熟悉的数学情境中，了解数学运算，提出运算问题，根据问题的特征建立合适的运算思路解决问题.

【知识内容】 函数/导数及其应用/能利用给出的基本初等函数的导数公式和导数的四则运算法则求简单函数的导数；能利用导数研究函数的单调性，会求函数的单调区间；会用导数求出基本初等函数的最大值、最小值.

【试题分析】 第（1）题首先应讨论其定义域，然后对函数求导，接下来通过解不等式判断出函数的单调性. 第（2）题涉及函数的最值问题，需要先对函数求导，讨论函数的单调性确定最小值. 在解答时求出 $g'(x)$ 后，发现 $g'(x) = f(x)$ ，利用第（1）题的求解结果，讨论

$g'(x)$ 的正负，进而研究 $g(x)$ 的单调性，求出 $g(x)$ 在 $x \geq 1$ 时的最小值 $g(1) = a + \frac{1}{2}$ ，随

即构造函数 $h(a) = \ln a + a - 1$ ，证明 $\ln a + a - 1 > 0$ 成立即可.

六、参考样卷

广西普通高中学业水平考试

数 学

(全卷满分 100 分, 考试时间 120 分钟)

注意事项:

1. 答题前, 考生务必将自己的姓名、座位号、考籍号填写在答题卡上.
2. 考生作答时, 请在答题卡上作答(答题注意事项见答题卡), 在本试题上作答无效.

一、选择题: 本大题共 30 小题, 每小题 2 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知集合 $A = \{5\}$, $B = \{4, 5\}$, 则 $A \cap B =$

- A. \emptyset B. $\{4\}$ C. $\{5\}$ D. $\{4, 5\}$

2. 180° 角的弧度数是

- A. 0 B. $\frac{\pi}{2}$ C. π D. 2π

3. 已知 i 是虚数单位, 则复数 $z = 3 - i$ 在复平面内对应的点位于

- A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

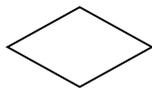
4. 若点 $P(-1, 2)$ 在角 θ 的终边上, 则 $\tan \theta$ 等于

- A. -2 B. $-\frac{\sqrt{5}}{5}$ C. $-\frac{1}{2}$ D. $\frac{2\sqrt{5}}{5}$

5. 下列程序框能表示赋值、计算功能的是



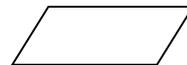
A.



B.



C.



D.

6. 在等比数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 2$, $a_2 = 4$, 那么 $a_4 =$

- A. 6 B. 8 C. 16 D. 32

7. 函数 $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{3})$ ($x \in \mathbb{R}$) 的最小正周期为

- A. $\frac{\pi}{2}$ B. π C. 2π D. 4π

8. 函数 $y = \frac{1}{\sqrt{x}}$ 的定义域是

- A. \mathbf{R} B. $\{x|x>0\}$ C. $\{x|x<0\}$ D. $\{x|x \neq 0\}$

9. 某校高二年级共有 600 名学生，编号为 001~600. 为了分析该年级上学期期末数学考试情况，用系统抽样方法抽取了一个样本容量为 60 的样本. 如果编号 006, 016, 026 在样本中，那么下列编号在样本中的是

- A. 010 B. 020 C. 036 D. 042

10. “ $x=1$ ”是“ $x^2-x=0$ ”的

- A. 充分而不必要条件 B. 必要而不充分条件
C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件

11. 经过两点 $A(0, 2), B(2, 4)$ 的直线的斜率为

- A. -1 B. 1 C. 2 D. 4

12. 函数 $f(x) = 2^x (x \in [1, 2])$ 的值域是

- A. $[0, 2]$ B. $[1, 2]$ C. $[1, 4]$ D. $[2, 4]$

13. 将函数 $y = \sin 2x (x \in \mathbf{R})$ 图象上所有的点向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，所得图象的函数解析式为

- A. $y = \sin(2x + \frac{\pi}{6}) (x \in \mathbf{R})$ B. $y = \sin(2x - \frac{\pi}{6}) (x \in \mathbf{R})$
C. $y = \sin(2x + \frac{\pi}{3}) (x \in \mathbf{R})$ D. $y = \sin(2x - \frac{\pi}{3}) (x \in \mathbf{R})$

14. 设向量 $\mathbf{a} = (5, -7)$, $\mathbf{b} = (-6, -4)$, 则 $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} =$

- A. -58 B. -2 C. 2 D. 22

15. 下列函数中，既是偶函数，又在 $(0, +\infty)$ 上单调递增的函数是

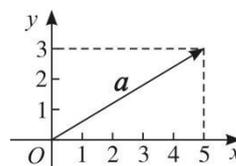
- A. $y = -\frac{1}{x}$ B. $y = \cos x$ C. $y = -x^2 + 3$ D. $y = e^{|x|}$

16. 抛物线 $y^2 = 6x$ 的准线方程是

- A. $x = -\frac{3}{2}$ B. $x = \frac{3}{2}$ C. $y = -\frac{3}{2}$ D. $y = \frac{3}{2}$

17. 如图，在平面直角坐标系中，向量 \mathbf{a} 的坐标为

- A. $(3, 5)$ B. $(5, 3)$
C. $(-3, -5)$ D. $(-5, -3)$



(第 17 题图)

18. 棱长均为 a 的三棱锥的表面积是

- A. $4a^2$ B. $\sqrt{3}a^2$ C. $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$ D. $\frac{3\sqrt{3}}{4}a^2$

19. 从某中学高三年级中随机抽取了 6 名男生，其身高和体重的数据如下表所示：

编号	1	2	3	4	5	6
----	---	---	---	---	---	---

身高/cm	170	168	178	168	176	172
体重/kg	65	64	72	61	67	67

由以上数据，建立了身高 x 预报体重 y 的回归方程 $\hat{y} = 0.80x - 71.6$ 。那么，根据

上述回归方程预报一名身高为 175cm 的高三男生的体重是

- A. 80 kg B. 71.6 kg C. 68.4 kg D. 64.8 kg

20. 用二分法求方程 $2^x + 3x = 7$ 的近似解时，列出下表

x	...	0	1	2	3	4	...
$f(x) = 2^x + 3x - 7$...	-6	-2	3	10	21	...

则方程的解所属区间是

- A. (0, 1) B. (1, 2) C. (2, 3) D. (3, 4)

21. 不等式组 $\begin{cases} x \geq 0, \\ y \geq 0, \\ x + y - 2 \leq 0 \end{cases}$ 所表示的平面区域的面积为

- A. 1 B. $\frac{3}{2}$ C. 2 D. 3

22. 由个别事实概括出一般结论的推理，称为归纳推理。以下推理为归纳推理的是

- A. 三角函数都是周期函数， $\sin x$ 是三角函数，所以 $\sin x$ 是周期函数
 B. 一切奇数都不能被 2 整除，525 是奇数，所以 525 不能被 2 整除
 C. 两直线平行，同位角相等。若 $\angle A$ 与 $\angle B$ 是两条平行直线的同位角，则 $\angle A = \angle B$
 D. 由 $1 = 1^2, 1 + 3 = 2^2, 1 + 3 + 5 = 3^2$ ，得 $1 + 3 + \dots + (2n - 1) = n^2 (n \in \mathbf{N}^*)$

23. 数列 $\sqrt{2}, \sqrt{5}, 2\sqrt{2}, \sqrt{11}, \dots$ 的一个通项公式是

- A. $a_n = \sqrt{n+1}$ B. $a_n = \sqrt{3n-1}$
 C. $a_n = \sqrt{3n+1}$ D. $a_n = \sqrt{n+3}$

24. 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的离心率是

- A. $\frac{4}{5}$ B. $\frac{5}{4}$ C. $\frac{3}{5}$ D. $\frac{5}{3}$

25. 在平面直角坐标系中，圆心坐标为 (2, 1) 且半径长等于 3 的圆的标准方程为

- A. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 3$ B. $(x-2)^2 + (y-1)^2 = 9$
 C. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 3$ D. $(x+2)^2 + (y+1)^2 = 9$

26. 下列不等关系正确的是

- A. $2^{0.5} < 1 < 0.5^2$ B. $0.5^2 < 1 < 2^{0.5}$
C. $1 < 2^{0.5} < 0.5^2$ D. $2^{0.5} < 0.5^2 < 1$

27. 函数 $f(x) = x^2 + \sin x$ 的导数 $f'(x) =$

- A. $2x + \cos x$ B. $2x + \sin x$ C. $x + \cos x$ D. $x - \cos x$

28. 关于函数 $y = \log_3(x-1)$ 的单调性, 下列说法正确的是

- A. 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数 B. 在 $(0, +\infty)$ 上是增函数
C. 在 $(1, +\infty)$ 上是减函数 D. 在 $(1, +\infty)$ 上是增函数

29. $\sin 75^\circ =$

- A. $\frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{4}$ B. $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ C. $\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{4}$ D. $\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

30. 若 $2^a = 3^b = 6$, 则 $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ 的值是

- A. $\frac{1}{2}$ B. 1 C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

二. 填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分.

31. 若函数 $f(x) = \begin{cases} x+1, & x \leq 0, \\ x^2, & x > 0, \end{cases}$ $f(2) =$ _____.

32. 在等差数列 $\{a_n\}$ 中, 已知 $a_1 = 3$, $a_3 = 7$, 则公差 $d =$ _____.

33. 已知 $\sin x = \frac{4}{5}$, 且 x 是第一象限角, 则 $\cos x =$ _____.

34. 不等式 $x^2 - 2x - 3 < 0$ 的解集为 _____.

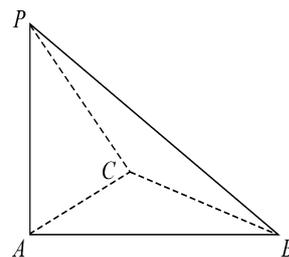
三. 解答题: 本大题共 4 小题, 共 28 分. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

35. (本小题满分 6 分)

在平面直角坐标系中, 已知两点 $A(-1, 1)$ 和 $B(3, 5)$, 求过线段 AB 中点且斜率为 2 的直线的方程.

36. (本小题满分 6 分)

在三棱锥 $P-ABC$ 中, $PA \perp$ 平面 ABC , $AC \perp BC$.
证明: $BC \perp$ 平面 PAC .



(第 36 题)

37. (本小题满分 8 分)

据相关规定, 24 小时内的降水量为日降水量 (单位: mm), 不同的日降水量对应的降水强度如下表:

日降水量	$(0, 10)$	$[10, 25)$	$[25, 50)$	$[50, 100)$	$[100, 250)$	$[250, +\infty)$
降水强度	小雨	中雨	大雨	暴雨	大暴雨	特大暴雨

为分析某市“主汛期”的降水情况, 从该市 2015 年 6 月~8 月有降水记录的监测数据中, 随机抽取 10 天的数据作为样本, 具体数据如下:

16 12 23 65 24 37 39 21 36 68

(1) 请完成以下表示这组数据的茎叶图;

1	2	—	
2	1	3	—
3	6	7	—
6	5	—	

(2) 从样本中降水强度为大雨以上 (含大雨) 天气的 5 天中随机选取 2 天, 求恰有 1 天是暴雨天气的概率.

38. (本小题满分 8 分)

已知函数 $f(x) = x^3 - ax^2 - 3x$.

(1) 若 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上是增函数, 求实数 a 的取值范围;

(2) 若函数 $g(x) = f(x) - (a^2 - 3)x + 1$ ($a > 0$) 至多有两个零点, 求实数 a 的取值范围.

样卷参考答案

一、选择题（共 20 小题，每小题 3 分，共 60 分）

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	C	C	D	A	A	C	B	B	C	A
题号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答案	C	D	C	B	D	A	B	B	C	B
题号	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
答案	C	D	B	A	B	B	A	D	D	B

二、填空题（共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

31. 4; 32. 2; 33. $\frac{3}{5}$; 34. $(-1, 3)$.

三、解答题（共 4 小题，共 28 分）

35.（本小题满分 6 分）

解：线段 AB 的中点坐标为 $(1, 3)$ ，

所求直线的方程是 $y - 3 = 2(x - 1)$ ，即 $y = 2x + 1$ 。

36.（本小题满分 6 分）

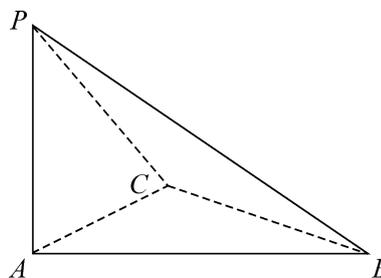
证明： $\because PA \perp$ 平面 ABC ， $BC \subset$ 平面 ABC ，

$\therefore PA \perp BC$ 。

又 $AC \perp BC$ ， $PA \subset$ 平面 PAC ，

$AC \subset$ 平面 PAC ， $PA \cap AC = A$ ，

$\therefore BC \perp$ 平面 PAC 。



（第 28 题图）

37.（本小题满分 8 分）

$$\text{解：(1)} \quad \begin{array}{l|ll} 1 & 2 & \underline{6} \\ 2 & 1 & \underline{3} & \underline{4} \\ 3 & 6 & 7 & \underline{9} \\ 6 & 5 & \underline{8} & \end{array}$$

(2) 记降水强度为大雨的 3 天为 a, b, c ，降水强度为暴雨的 2 天为 d, e ，从这 5 天中抽取 2 天的所有情况为 $ab, ac, ad, ae, bc, bd, be, cd, ce, de$ ，基本事件总数为 10。

记“5 天中抽取 2 天，恰有一天发生暴雨”为事件 A ，可能结果为 ad, ae, bd, be, cd, ce ，即事件 A 包含的基本事件数为 6。

所以恰有 1 天发生暴雨的概率 $P(A) = \frac{6}{10} = 0.6$ 。

38.（本小题满分 8 分）

解: (1) $f'(x) = 3x^2 - 2ax - 3 \geq 0$, $\therefore a \leq \frac{3}{2}(x - \frac{1}{x})$.

\because 当 $x \geq 1$ 时, $y = \frac{3}{2}(x - \frac{1}{x})$ 是增函数, 其最小值为 $\frac{3}{2}(1-1) = 0$, $\therefore a \leq 0$.

(2) $g(x) = x^3 - ax^2 - a^2x + 1$,

由 $g'(x) = 3x^2 - 2ax - a^2 = 0$, 得 $x = a$ 或 $x = -\frac{a}{3}$. $\because a > 0$, $\therefore a > -\frac{a}{3}$.

当 x 变化时, $g'(x)$, $g(x)$ 的变化情况如下表:

x	$(-\infty, -\frac{a}{3})$	$-\frac{a}{3}$	$(-\frac{a}{3}, a)$	a	$(a, +\infty)$
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	单调递增	$\frac{5}{27}a^3 + 1$	单调递减	$-a^3 + 1$	单调递增

$\therefore x = -\frac{a}{3}$ 时, $g(x)$ 有极大值, $g(x)_{\text{极大}} = g(-\frac{a}{3}) = \frac{5}{27}a^3 + 1$;

$x = a$ 时, $g(x)$ 有极小值, $g(x)_{\text{极小}} = g(a) = -a^3 + 1$.

\because 函数 $g(x) = f(x) - (a^2 - 3)x + 1$ ($a > 0$) 至多有两个零点,

$\therefore g(a) \geq 0$ 或 $g(-\frac{a}{3}) \leq 0$.

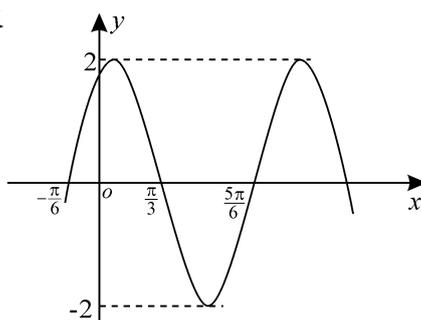
$\because a > 0$, $\therefore g(-\frac{a}{3}) = \frac{5}{27}a^3 + 1 > 0$.

$\therefore g(a) = -a^3 + 1 \geq 0$. 解得 $0 < a \leq 1$.

16. 已知函数 $y = A\sin\left(2x + \frac{\pi}{3}\right)$ ($A > 0$) 的部分图象

如图所示, 那么 $A =$

- A. $\frac{\pi}{6}$ B. $\frac{\pi}{3}$
 C. 1 D. 2



(第 16 题图)

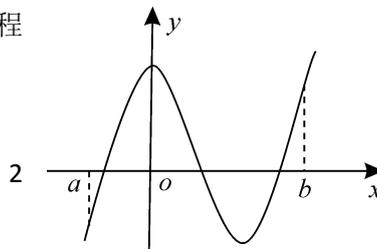
17. 在 $\triangle ABC$ 中, 已知角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c . 若 $a=1, c=2, A=30^\circ$, 则角 $C =$

- A. 15° B. 45°
 C. 75° D. 90°

18. 已知函数 $y = f(x)$ 的图象如图所示, 那么方程

$f(x) = 0$ 在区间 (a, b) 内的根的个数为

- A. 1 B. 3
 C. 4 D. 5



(第 18 题图)

19. 椭圆 $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ 的两个焦点的坐标分别为

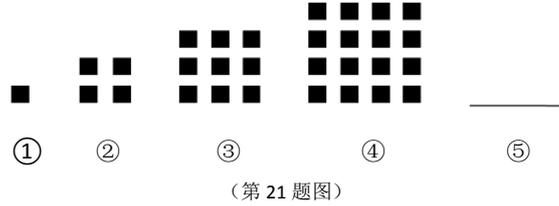
- A. $(5, 3), (3, 5)$ B. $(5, -3), (5, 3)$
 C. $(-4, 0), (4, 0)$ D. $(3, -5), (3, 5)$

20. 已知 $\cos \alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}$, 且 $0 < \alpha < \pi$, 那么 $\sin 2\alpha =$

- A. $\frac{1}{2}$ B. $\frac{\sqrt{2}}{2}$
 C. $\frac{\sqrt{3}}{2}$ D. 1

二、填空题：本大题共 6 小题，每小题 2 分，共 12 分.

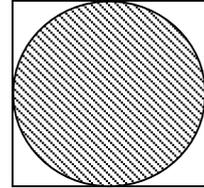
21. 如图，①②③④都是由小正方形组成的图案，照此规律，图案⑤中的小正方形个数为_____.



22. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB \rightleftharpoons a$ ， $AC \rightleftharpoons b$ ，若 $a \perp b = 0$ ，则 $\triangle ABC$ 是_____三角形
(填“钝角”、“直角”或“锐角”).

23. 等比数列 1, 2, 4, 8, ... 的公比 $q =$ _____.

24. 如图是正方形及其内切圆，向正方形内随机撒一粒“豆子”，它落到阴影部分的概率是_____.



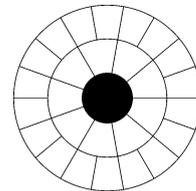
25. 函数 $f(x) = x^2 - 2x - 1$ 在区间 $[0, 3]$ 上的最大值是_____.

26. 设双曲线 $C: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 ， P 是双曲线 C 右支上一点，若 $|PF_2| = 5$ ，则 $\triangle PF_1F_2$ 的面积为_____.

三、解答题：本大题共 4 小题，共 28 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

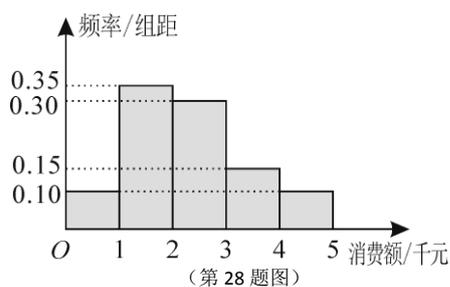
27. (本小题满分 6 分)

在我国，9 为数字之极，寓意尊贵吉祥、长久恒远，所以在许多建筑中包含了与 9 相关的设计. 某小区拟修建一个地面由扇环形的石板铺成的休闲广场(如图)，广场中心是一圆形喷泉，围绕它的第一圈需要 9 块石板，从第二圈开始，每一圈比前一圈多 9 块，共有 9 圈. 问：修建这个广场共需要多少块扇环形石板？



28. (本小题满分 6 分)

某商场在“五一”促销活动中,为了了解消费额在 5 千元以下(含 5 千元)的顾客的消费分布情况,从这些顾客中随机抽取了 100 位顾客的消费数据(单位:千元),按 $(0,1)$, $[1,2)$, $[2,3)$, $[3,4)$, $[4,5]$ 分成 5 组,制成了如图所示的频率分布直方图.现采用分层抽样的方法从 $(0,1)$ 和 $[2,3)$ 两组顾客中抽取 4 人进行满意度调查,再从这 4 人中随机抽取 2 人作为幸运顾客,求所抽取的 2 位幸运顾客都来自 $[2,3)$ 组的概率.



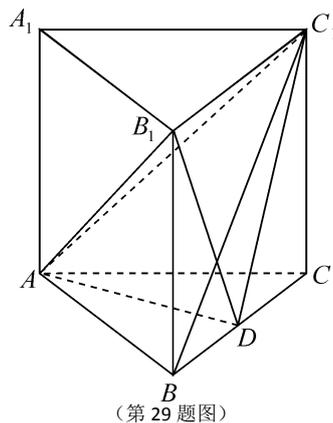
29. (本小题满分 8 分)

在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中,已知底面 ABC 是等边三角形, $AA_1 \perp$ 底面 ABC , D 是 BC 的中点.

(1) 求证: $AD \perp BC_1$;

(2) 设 $AA_1 = AB = 2$, 求三棱锥 B_1-ADC_1 的体积.

(参考公式: 锥体体积公式 $V = \frac{1}{3}Sh$, 其中 S 为底面面积, h 为高.)



30. (本小题满分 8 分)

已知函数 $f(x) = xe^x$ ，其中 $e = 2.71828 \dots$ 为自然对数的底数.

(1) 求曲线 $y = f(x)$ 在点 $(1, f(1))$ 处的切线方程;

(2) 证明: $f(x) > \ln x + 1$.

2018年6月广西壮族自治区普通高中学业水平考试

数学参考答案及评分标准

一、选择题（共20小题，每小题3分，共60分）

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	A	C	B	D	A	D	A	C	A	A
题号	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
答案	B	B	B	C	B	D	D	B	C	C

二、填空题（共6小题，每小题2分，共12分）

21. 25 ; 22. 直角; 23. 2 ; 24. $\frac{\pi}{4}$; 25. 2 ; 26. $4\sqrt{6}$.

三、解答题（共4小题，共28分）

27.（本题满分6分）

解法一：设从第1圈到第9圈石板数所构成的数列为 $\{a_n\}$ ，

由题意知， $\{a_n\}$ 是等差数列，.....1分

其中 $a_1=9$ ，公差 $d=9$2分

$a_9=9+(9-1)\times 9=81$ ，3分

数列 $\{a_n\}$ 的前9项和

$$S_9 = \frac{(a_1 + a_9) \times 9}{2} \dots\dots\dots 4分$$

$$= \frac{(9 + 81) \times 9}{2} \dots\dots\dots 5分$$

$$= 405.$$

答：修建这个广场共需要用405块扇环形石板.6分

解法二：依题意，广场从第1圈到第9圈所需的石板数依次为

9, 18, 27, ..., 81.3分

第1圈到第9圈的石板数之和

$$S_9 = 9 + 18 + 27 + \dots + 81 \dots\dots\dots 4分$$

$$= \frac{9(9 + 81)}{2} \dots\dots\dots 5分$$

$$= 405.$$

所以，修建这个广场共需要扇环形石板405块.6分

28. (本题满分 6 分)

解: 根据频率分布直方图,

(0,1) 组的顾客有 $100 \times 0.10 = 10$ 人,1 分

[2,3) 组的顾客有 $100 \times 0.30 = 30$ 人.2 分

用分层抽样的方法从两组顾客中抽取 4 人, 则从

(0,1) 组抽取 1 人, 记为 A; 从 [2,3) 组抽取 3 人,

分别记为 B_1, B_2, B_33 分

于是, 从这 4 人中随机抽取 2 人的所有可能结果为 $AB_1, AB_2, AB_3, B_1B_2,$

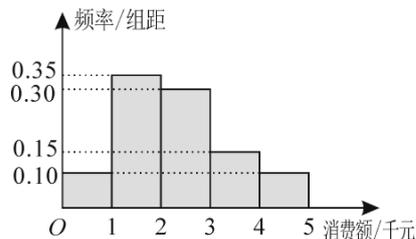
$B_1B_3,$

B_2B_3 共 6 种.4 分

设所抽取的 2 人都来自 [2,3) 组为事件 C, 所包含的结果为 B_1B_2, B_1B_3, B_2B_3

共 3 种.5 分

因此, 所抽取的 2 位幸运顾客都来自 [2,3) 组的概率 $P(C) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$6 分



(第 28 题图)

29. (本题满分 8 分)

(1) 证明: 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 由 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 知 $CC_1 \perp$ 平面 ABC .

$\because AD \subset$ 平面 ABC ,

$\therefore AD \perp CC_1$1 分

$\because \triangle ABC$ 是等边三角形, D 是 BC 的中点,

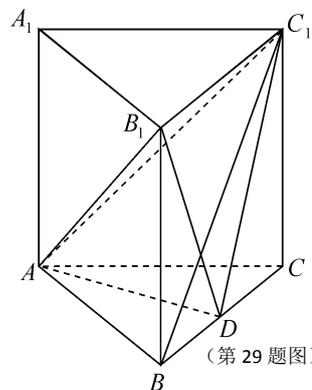
$\therefore AD \perp BC$2 分

又 $CC_1 \cap BC = C$,

$\therefore AD \perp$ 平面 BCC_1B_13 分

又 $BC_1 \subset$ 平面 BCC_1B_1 ,

$\therefore AD \perp BC_1$4 分



(第 29 题图)

(2) 解法一: 在三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, 由 $AA_1 \perp$ 平面 ABC , 知 $BB_1 \perp$ 平面 ABC .

$\therefore S_{\triangle B_1C_1D} = \frac{1}{2} B_1C_1 \cdot B_1B = \frac{1}{2} \times 2 \times 2 = 2, AD = \sqrt{3}$,6 分

$\therefore V_{B_1-ADC_1} = V_{A-B_1C_1D} = \frac{1}{3} S_{\triangle B_1C_1D} \cdot AD$ 7 分

$$= \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

∴三棱锥 B_1-ADC_1 的体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 8 分

解法二：在三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，由 $AA_1 \perp$ 平面 ABC ，知 $CC_1 \perp$ 平面 ABC 。

∴ $V_{ABC-A_1B_1C_1} = S_{\Delta ABC} \cdot AA_1$ ， $V_{A-A_1B_1C_1} = \frac{1}{3} S_{\Delta A_1B_1C_1} \cdot AA_1$ ， 5 分

$V_{B_1-ABD} = V_{C_1-ADC} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} S_{\Delta ABC} \cdot CC_1 = \frac{1}{6} S_{\Delta ABC} \cdot AA_1$ ， 6 分

∴ $V_{B_1-ADC_1} = V_{ABC-A_1B_1C_1} - V_{A-A_1B_1C_1} - V_{B_1-ABD} - V_{C_1-ADC}$ 7 分

$$= \frac{1}{3} S_{\Delta ABC} \cdot AA_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}.$$

∴三棱锥 B_1-ADC_1 的体积为 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$ 8 分

30. (本题满分 8 分)

解：(1) 由已知，得 $f'(x) = e^x + xe^x = e^x(x+1)$ 1 分

$f(1) = e$ ， $f'(1) = 2e$ ， 2 分

所求的切线方程为 $y - e = 2e(x - 1)$ ，即 $2ex - y - e = 0$ 3 分

(2) **证法一：** 要证明 $f(x) > \ln x + 1$ ，即证明 $xe^x > \ln x + 1 (x > 0)$ 。

∴ $x > 0$ ，即证 $e^x > \frac{\ln x + 1}{x}$ 4 分

令 $F(x) = e^x$ ， $G(x) = \frac{\ln x + 1}{x}$ ，即证明 $F(x) > G(x)$ 。

∴ $x > 0$ ，∴ $F(x) > 1$. ① 5 分

$G'(x) = -\frac{\ln x}{x^2}$ ，当 $x \in (0, 1)$ 时， $G'(x) > 0$ ；当 $x \in (1, +\infty)$ 时， $G'(x) < 0$ 。

∴ $y = G(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递增，在 $(1, +\infty)$ 上单调递减. 6 分

$G(x)_{\max} = G(1) = 1$ ，即 $G(x) \leq 1$. ② 7 分

由①②可知 $F(x) > G(x)$ ，从而 $f(x) > \ln x + 1$ 8 分

证法二： 要证 $f(x) > \ln x + 1$ ，即证 $xe^x > \ln x + 1 (x > 0)$ 。

令 $h(x) = xe^x - \ln x - 1$ ， 4 分

由于 $h'(x) = (x+1)e^x - \frac{1}{x}$ ，易知 $y = h'(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递增. 5 分

$$\therefore h'\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2}e^{\frac{1}{2}} - 2 > 0, \quad h'\left|\frac{1}{4}\right| = \frac{5e^{\frac{1}{4}} - 16}{4} < 0,$$

\therefore 存在 $x_0 \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ 使 $h'(x) = (x+1)e^x - \frac{1}{x} = 0$, 即 $(x_0+1)e^{x_0} = \frac{1}{x_0}$6分

当 $x \in (0, x_0)$ 时, $h'(x) < 0$; 当 $x \in (x_0, +\infty)$ 时, $h'(x) > 0$.

所以 $y = h(x)$ 在 $(0, x_0)$ 上单调递减, 在 $(x_0, +\infty)$ 上单调递增.

$$h(x)_{\min} = h(x_0) = x_0 e^{x_0} - \ln x_0 - 1.$$

$\because x_0 e^{x_0} = \frac{1}{x_0+1}$, $\therefore h(x_0) = \frac{1}{x_0+1} - \ln x_0 - 1$7分

令 $H(x) = \frac{1}{x+1} - \ln x - 1$, 则 $y = H(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减.

$\because x_0 \in \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$, $\therefore h(x_0) > H\left(\frac{1}{2}\right) = \ln 2 - \frac{1}{3} > 0$.

所以 $f(x) > \ln x + 1$8分